Problemas de E.D.O. (2º de Matemáticas) Curso 2015-16.

1. Dado el problema
$$\begin{cases} y' = y^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$
hallar al menos tres soluciones. *Indicación*: Combinar las dos soluciones que se pueden obtener de forma sencilla.

2. Calcular todos los valores $\alpha \in [0, \infty)$ para los que en el problema
$$\begin{cases} y' = |y|^{\alpha} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$
haya existencia y unicidad (para $\alpha = 0$ escribir $|y|^{\alpha} = 1$).

3. Decidir razonadamente si cada una de las siguientes implicaciones es cierta para funciones $y, z \in C^1\big([0, \infty)\big)$, dando en cada caso un contraejemplo o una demostración:
a) $y \geq z \Rightarrow y' \geq z'$.
b) $y' \geq z' \Rightarrow y \geq z$.
c) $y(0) = z(0)$, $y' \geq z' \Rightarrow y \geq z$.

4. Estudiar la existencia y unicidad para el problema
$$\begin{cases} y' = |y| + x \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$
y hallar explícitamente las soluciones cuando $y_0 = 1$ y cuando $y_0 = -1$, indicando a qué espacio $C^n(\mathbb{R})$ pertenecen.

5. Estudiar si para cada x_0, y_0 la solución de
$$\begin{cases} y' = \dfrac{xy + y^2}{x^2 + y^2 + 2} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$
se puede definir en toda la recta real.

6. Considerar
$$\begin{cases} y' = y^4 + r \\ y(0) = 0 \end{cases}$$
donde r es una constante positiva. Hallar un entorno de cero (intentando que sea lo mayor posible) en el que se pueda asegurar existencia y unicidad. Probar que si la solución existe en $[0, r^{-3/4}]$ entonces $y(r^{-3/4}) \geq r^{1/4}$ y utilizar este hecho junto con

$y' \geq y^4$ para encontrar otro entorno en el que se pueda asegurar que no existe solución regular.

7. Sea y la solución de

$$\begin{cases} y' = y + \operatorname{sen}(xy) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

y sea z la solución de esta ecuación aproximando $\operatorname{sen}(xy)$ por xy.

a) Hallar una cota superior para $\max |z(x) - y(x)|$ cuando $x \in [0, 0'1]$.

b) Usando el apartado anterior, calcular una aproximación para $y(0'1)$.

c) ¿Qué cota superior se podría dar para $\max |z(x) - y(x)|$ si $x \in [-0'1, 0]$?

8. Sean los problemas

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{1+x^2} + e^{-y^2} \\ y(0) = 10 \end{cases} \qquad \begin{cases} z' = \dfrac{z}{1+x^2} \\ z(0) = 10 \end{cases}$$

Demostrarg que $0 \leq y(x) - z(x) \leq e^{-100}(e^x - 1)$ para $x \in [0, 1]$.

9.

Estúdiese el intervalo de definición de las soluciones no prolongables de

1. $x' = \dfrac{x^2 + t^4}{\sqrt{1 + x^2 + t^2}}$
2. $x' = \dfrac{x^3 + t^5}{\sqrt{1 + x^4 + t^4}}$

10. Sean los problemas de Cauchy:

$$(P_k) \qquad \begin{cases} x_k'(t) = |x_k|^{1/2} + \dfrac{1}{k+1}, \quad k \in \mathbb{N} \\ x_k(0) = 0 \end{cases}$$

Demuéstrese que (P_k) tiene una única solución. Estúdiese si la sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a cero en el intervalo $[0, \frac{1}{2}]$.

11. Consideremos el sistema diferencial

$$\begin{cases} x' = x - y - \dfrac{x}{(1-t)(x^2+y^2)^{1/2}} \\ y' = x + y - \dfrac{y}{(1-t)(x^2+y^2)^{1/2}} \end{cases}$$

donde $x^2 + y^2 > 0$.

Estúdiese si la solución del problema con dato (t_0, x_0, y_0) verificando $0 < x_0^2 + y_0^2 < 1$ y $t_0 < 1$, existe sobre el intervalo $(t_0, 1)$

Indicación: Puede ser una idea pasar a coordenadas polares.

Problemas autónomos en $\mathbb{R}^n$.

En los problemas que siguen V es un campo de vectores C^1 y nos referiremos a la ecuación

$$(E) \qquad x' = V(x).$$

En Geometría Diferencial suele usarse la siguiente nomenclatura.

Un campo V se dice que es COMPLETO *si todas las curvas de campo, es decir las tangentes en cada punto a V, o bien, equivalentemente, las soluciones del problema (E), están definidas en $(-\infty, \infty)$.*

12. Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$, es una integral primera de (E) si es constante a lo largo de soluciones de (E), es decir, si

$$\frac{d}{dt} f(x(t)) \equiv \langle \nabla f(x(t)), V(x(t)) \rangle = 0.$$

Demostrar que si f es una integral primera para (E) tal que

$$\lim_{|x|\to\infty} f(x) = \infty,$$

entonces V es completo.

13.

a) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$, verificando

$$\lim_{|x|\to\infty} f(x) = \infty,$$

sea $x = x(t)$ solución de (E) y supongamos que existe una constante $c > 0$ tal que $\frac{d}{dt} f(x(t)) \leq c$, entonces $x(t)$ es indefinidamente prolongable.

b) Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$, verifica

$$\lim_{|x|\to\infty} f(x) = \infty,$$

y

$$\left|\frac{d}{dt} f(x(t))\right| \equiv |\langle \nabla f(x(t)), V(x(t)) \rangle| < M$$

entonces V es completo.

14.

a) Demuéstrese que las ecuaciones de Newton

$$x'' + \nabla U(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3$$

con el potencial $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $U \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$, verificando

$$\lim_{|x|\to\infty} U(x) = \infty,$$

son completas.

b) Misma cuestión que en a) cuando, además se añade un término de rozamiento, es decir,

$$x'' + \nabla U(x) = -R(x'),$$

siendo $R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $R \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$ y verificando $\langle \xi, R(\xi) \rangle \geq 0$, para todo $\xi \in \mathbb{R}^3$.

Indicación.- Multiplíquese la ecuación por $x'(t)$ y estúdiese la energía resultante